Enigme Labo Maths décembre 2023

Enoncé

Solution :

Le nombre K est 6174. En effet :

2024 → 4220 - 0224 = 3996
3996 → 9963 - 3699 = 6264
6264 → 6642 - 2466 = 4176
4176 → 7641 - 1467 = 6174
6174 → 7641 - 1467 = 6174

On cherche le plus grand nombre de 4 chiffres tous distincts deux à deux et non nuls tel que ce nombre permette d'obtenir K du premier coup.
Notons N ce nombre et abcd sont écriture décimale. Etant donné que l'on cherche le plus grand nombre possible on suppose que $d < c < b < a$ et on doit avoir abcd - dcba = 6174.
On a $N = 10^3 \times a + 10^2 \times b + 10 \times c + d$. Donc :
abcd - dcba = $10^3 \times a + 10^2 \times b + 10 \times c + d - (10^3 \times d + 10^2 \times c + 10 \times b + a)$
abcd - dcba = $10^3 \times (a - d) + 10^2 \times (b - c) + 10 \times (c - b) + d - a$
abcd - dcba = $(10^3 - 1)\times (a - d) + (10^2 - 10)\times (b - c)$
abcd - dcba = $999 \times (a - d) + 90 \times (b - c)$
abcd - dcba = $9[111 \times (a - d) + 10 \times (b - c)]$
Donc abcd - dcba = 6174 $\Leftrightarrow 9[111 \times (a - d) + 10 \times (b - c)] = 6174$
$\Leftrightarrow 111 \times (a - d) + 10 \times (b - c) = 686$
Comme de plus $1 < d < c < b < a \leq 9$ alors on a nécessairement $1 \leq a - d \leq 8$ et $1 \leq b - c \leq 6$
En posant $u = a - d$ et $v = b - c$ alors abcd - dcba = 6174 $\Leftrightarrow 111 \times u + 10 \times v = 686$
On résout cette équation en testant avec tous les entiers u et v tels que $1 \leq u \leq 8$ et $1 \leq v \leq 6$.
Il n'y a qu'une seule solution : $(u ; v) = (6 ; 2)$ que l'on peut par exemple trouver facilement à l'aide d'un fichier tableur. Donc $a - d = 6$ et $b - c = 2$.
Comme on veut N le plus grand possible prenons $a = 9$ et $b = 8$, d'où $c = 6$ et $d = 3$.
Le nombre N est donc 9863.
Vérification : 9863 - 3689 = 6174 .

David Hourlier