Enigme du mois de Février

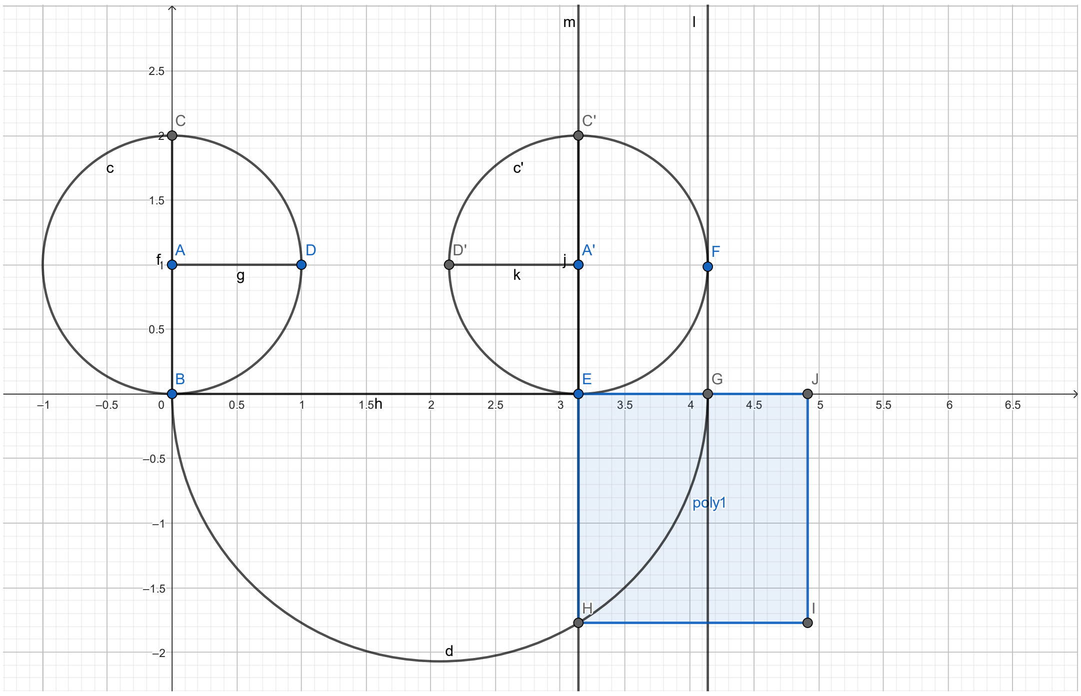

Figure 1

Pour commencer, définissons un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ orthonormé et y avons reproduit la figure avec $B(0;0)$ et $A(0;1)$. Nommons ensuite les points et reproduisons la figure (ci-dessus).

On a la distance BE égale à la moitié de la circonférence de c, d'où $BE = \frac{2\pi r}{2} = \pi r = \pi$.

On a $BG = BE + EG = \pi + A'F = \pi + 1$, le rayon r_d du demi-cercle d est donc égal à $\frac{\pi+1}{2}$.

Soit K le milieu de d. On a $K\left(\frac{\pi+1}{2};0\right)$.

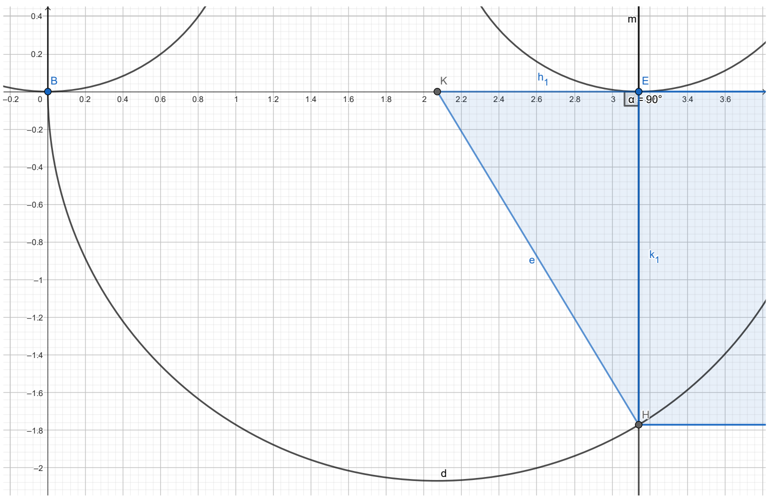

Figure 2 : Un détail de la figure

Intéressons-nous maintenant au détail montrer dans la Figure 2 pour trouver la distance EH. Dans le triangle KEH rectangle en E, on peut appliquer le théorème de Pythagore pour apprendre que $KH^2 = HE^2 + EK^2 \Leftrightarrow r_d^2 = HE^2 + (BE - BK)^2$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi+1}{2}\right)^2 = HE^2 + \left(\pi - \frac{\pi+1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\pi+1)^2}{4} = HE^2 + \left(\frac{2\pi}{2} - \frac{\pi+1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2+2\pi+1}{4} = HE^2 + \left(\frac{2\pi}{2} - \frac{\pi+1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2+2\pi+1}{4} = HE^2 + \left(\frac{2\pi-\pi-1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2+2\pi+1}{4} = HE^2 + \left(\frac{\pi-1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2+2\pi+1}{4} = HE^2 + \frac{\pi^2-2\pi+1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2+2\pi+1}{4} - \frac{\pi^2-2\pi+1}{4} = HE^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2+2\pi+1-(\pi^2-2\pi+1)}{4} = HE^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi+2\pi}{4} = HE^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\pi}{4} = HE^2$$

$$\Leftrightarrow HE^2 = \pi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{HE = \sqrt{\pi}}$$

Pour terminer, calculons l'aire du carré $poly1$, pui celle du disque c' (cf. Figure 1) :

$$\mathcal{A}_{poly1} = c^2 = HE^2 = \left(\sqrt{\pi}\right)^2 = \pi$$

$$\mathcal{A}_{c'} = \pi r^2 = \pi \times 1^2 = \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_{poly1} = \mathcal{A}_{c'}}$$

Et ainsi, nous trouvons que cette technique permet d'arriver à un résultat très connu qui a longuement laissé perplexes les mathématiciens antiques : la Quadrature du cercle.